

一. 填空题

1. 函数 $y = \sin\sqrt{x-1}$ 的定义域 _____解: $y = \sqrt{x-1}$ 式子有意义 $\Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ (或 $[1, +\infty)$)2. $f(x) = \frac{1-x}{x}$ ($x \neq 0$), 则 $f[f(2)] =$ _____解: $f(2) = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$

$$f[f(2)] = f[-\frac{1}{2}] = \frac{1-(-\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -3$$

3. 设 $3f(x) - f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}$, 则 $f(x) =$ _____解: 以 $\frac{1}{x}$ 代替 x , 可得下列方程组

$$\begin{cases} 3f(\frac{1}{x}) - f(x) = \frac{1}{x} \\ 3f(x) - f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 3f(\frac{1}{x}) - f(x) = X \\ 3f(x) - f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\text{解方程组: } \begin{cases} f(x) = \frac{1}{8}(x + \frac{3}{x}) \\ f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{8}(3x + \frac{1}{x}) \end{cases} \quad (x \neq 0)$$

4. 函数 $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内 _____ (填有界或无界)

$$\text{解: } \because e^x > 0 \quad \therefore 1+e^x > 1$$

$$\therefore 0 < \frac{1}{1+e^x} < 1, \text{ 故 } f(x) = \frac{1}{1+e^x} \text{ 有界.}$$

5. 函数 $y = \sin x \cos x$ 的周期 $T =$ _____

$$\text{解: } y = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x), \text{ 故最小正周期为 } \pi.$$

注, 无特别说明, 函数的周期是指最小正周期。

二. 解答题

1. 设 $f(x) = \begin{cases} 2^x & -1 \leq x \leq 0 \\ x+1 & 0 < x < 1 \\ x-2 & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$, 求 $f[f(\frac{3}{2})]$ 及 $f[(\frac{1}{3})]$.

解: $f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$

$$f[f(\frac{3}{2})] = f[-\frac{1}{2}] = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f[(\frac{1}{3})] = f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

注, 若 $f[(\frac{1}{3})]$ 系 $f[f(\frac{1}{3})]$ 的错误, 则 $f[f(\frac{1}{3})] = f[\frac{4}{3}] = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$

2. 设 $f(x) = \frac{x}{1+x}$, 求 $f\{f[f(x)]\}$

解: $f[f(x)] = \frac{f(x)}{1+f(x)} = \frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}} = \frac{x}{1+2x} \quad (x \neq -\frac{1}{2}, x \neq -1)$

$$f\{f[f(x)]\} = \frac{f[f(x)]}{1+f[f(x)]} = \frac{\frac{x}{1+2x}}{1+\frac{x}{1+2x}} = \frac{x}{1+3x} \quad (x \neq -\frac{1}{3}, x \neq -\frac{1}{2}, x \neq -1)$$

由规律总结, 然后用数学归纳法可以证明,

$$\underbrace{f\{f[f \dots f(x) \dots]\}}_{\text{共 } n \text{ 个 } f} = \frac{x}{1+n x}$$

定义域为 $x \neq -1, x \neq -\frac{1}{2}, \dots, x \neq -\frac{1}{n}$

同步练习 P₆

3. 求函数 $f(x) = \arcsin(x-1) + \lg(x^2-4x+3)$ 的定义域

$$\text{解: } \begin{cases} -1 \leq x-1 \leq 1 \\ x^2-4x+3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x < 1 \text{ 或 } x > 3 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x < 1$$

所以函数 $f(x) = \arcsin(x-1) + \lg(x^2-4x+3)$ 的定义域为 $[0, 1)$

4. 判断函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

$$\text{解: } f(x) + f(-x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \ln(-x + \sqrt{(-x)^2+1})$$

$$= \ln[(\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{x^2+1} - x)] = \ln 1 = 0$$

$\therefore$ 函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 是奇函数.

同步练习 P6

5. 求函数 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 的反函数.

解: $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$

$$\Rightarrow e^x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2 \times 1} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

$e^x > 0$, 故 $e^x = y - \sqrt{y^2 + 1}$ 舍去, 所以 $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$

即 $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$

$\therefore$ 函数 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 的反函数为 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$

同步练习 P7

三. 证明题 1. 设 $f(x) = \ln(x+1)$, 证明 $f(x^2-2) - f(x-2) = f(x)$

证明: $f(x^2-2) - f(x-2) = \ln(x^2-2+1) - \ln(x-2+1)$

$$= \ln(x^2-1) - \ln(x-1)$$

$$= \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln(x+1) = f(x)$$

注, 这题本身是错误的. 理由如下

$f(x) = \ln(x+1)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$

$f(x^2-2) = \ln(x^2-1)$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$f(x-2) = \ln(x-1)$ 的定义域为 $(1, +\infty)$

左边 $= f(x^2-2) - f(x-2)$ 的定义域为 $(1, +\infty)$

左边和右边的定义域不一样, 函数不可能相等。

同步练习P₇

理学院 廖国勇 2016.9.18

2. 证明: 函数 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ 为奇函数.

$$\begin{aligned}\text{证: } f(x) + f(-x) &= \frac{2^x - 1}{2^x + 1} + \frac{2^{-x} - 1}{2^{-x} + 1} = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} + \frac{1 - 2^x}{1 + 2^x} \\ &= 0 \quad (x \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

$\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ 是奇函数.

3. 证明: 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 上无界.

证明: $\forall M > 0$, 只要 $x \in (0, \frac{1}{M}) \cap (0, 1)$, 则有

$$f(x) = \frac{1}{x} > M$$

$\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 上无界.